

NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971

Soal Dan Jawaban Limit Dan Kontinuitas

1. Tentukan nilai limit dari fungsi – fungsi berikut :

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)\cos(3x)}{5x} =$

b. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(10x-5\pi)}{3\pi-6x} =$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) =$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x) =$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin(5x)+x^2}{3x}} =$

g. $\lim_{x \rightarrow 0} e^x =$

h. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x =$

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$

j. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

k. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2+3x+2} =$

l. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-2}{x^2+3x+2} =$

m. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{10x} - e^{7x} + e^{2x} - e^{4x} =$

n. $\lim_{x \rightarrow \infty} -e^{10x} - e^{-7x} + e^{2x} - e^{4x} =$

o. $\lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-10x} - e^{7x} + e^{2x} - e^{4x} =$

2. Misalkan f, g, h, k adalah fungsi dengan $f(x) \leq g(x), k(x) \leq h(x)$, dan $g(x) \leq k(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Lebih lanjut, misalkan $f(x) = x^2 - 3, h(x) = -x^2 - 3$. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$!

3. Misalkan f, g suatu fungsi dengan $g(x) \leq f(x) < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ dan $g(x) \rightarrow 0$ ketika $x \rightarrow \infty$. Apakah $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$? Jelaskan jawaban anda.

4. Tentukan kontinuitas dari fungsi – fungsi dibawah ini.

a. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

b. $f(x) = \frac{x^3}{x^2}$

c. $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}$

d. $f(x) = x^3 - \frac{2x}{x} + \frac{x}{\cos(x-\frac{\pi}{3})}$

e. $f(x) = \frac{x}{\sin(3x)}$

NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan sebagai $f(x) = x + 2$ untuk $x \in (-2, 2]$, $f(x) = 0$ untuk $x \notin (-2, 2]$. Tentukan range dari fungsi tersebut.

5. Lebih lanjut, tanpa menghitung nilai dari $f(x)$ tentukan apakah 3 adalah range dari fungsi tersebut. (Clue: IVT).

Nama: Edward
NIM: 2201741971

$$\text{II. a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) \cos(3x)}{5x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x}{1}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3(0)}{1}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$$

$$2/ \text{ b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(10x - 5\pi)}{3\pi - 6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 5(2x - \pi) - 1}{3(\pi - 2x)}$$

$$= \frac{-5}{3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x)$$

Jika $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1) = 0$$

maka, dibawah angka 1 pasti negatif jadi jika $x > 0$ (0,1; 0,5; 0,999)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x)$$

Ditinjau dari grafik $\ln(x)$, maka x tidak akan bernilai negatif (-), yang berarti $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(x)$ tidak terdefinisi

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)(x)} = e$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin(5x) + x^2}{3x}}; \text{ Anggap } A = \frac{\sin(5x) + x^2}{3x}$$

$$A' = \frac{5 \cos(5x) + 2x}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{5 \cos(5(0)) + 2(0)}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{(0)} = 1$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(\infty)} = \infty$$

$$\text{I) } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(-\infty)} = 0$$

$$J) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

* Catatan:

$\lim_{x \rightarrow \infty} (0,5)^n$, jika $n = 1; 2; 3; \dots$

akan masih membuat 0,0025 ...

akan menuju 0

$$K) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \frac{1}{2} (\infty) = \infty$$

$$L) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 2}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 0 - 0}{1 + 0 + 0} = 3$$

$$M) \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{10x} - e^{7x} + e^{2x} - e^{4x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{10x} \left(1 - \frac{1}{e^{3x}} + \frac{1}{e^{8x}} - \frac{1}{e^{6x}}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{10x}) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^{3x}} + \frac{1}{e^{8x}} - \frac{1}{e^{6x}}\right)$$

$$= \infty \cdot 1 = \infty$$

$$N) \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{10x} - e^{-7x} + e^{2x} - e^{4x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{10x} \left(-1 - \frac{1}{e^{17x}} + \frac{1}{e^{8x}} - \frac{1}{e^{6x}}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{10x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-1 - \frac{1}{e^{17x}} + \frac{1}{e^{8x}} - \frac{1}{e^{6x}}\right)$$

$$= \infty (-1) = -\infty$$

$$O) \lim_{x \rightarrow \infty} (-e^{-10x} - e^{7x} + e^{2x} - e^{4x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{7x} \left(-\frac{1}{e^{-17x}} - 1 + \frac{1}{e^{5x}} - \frac{1}{e^{3x}}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{7x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{e^{-17x}} - 1 + \frac{1}{e^{5x}} - \frac{1}{e^{3x}}\right)$$

$$= \infty (-1) = -\infty$$

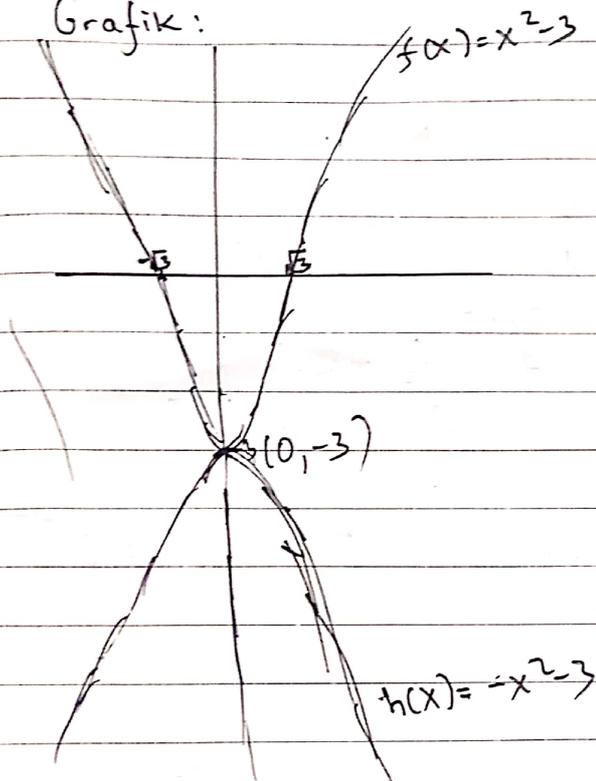
$$\left. \begin{array}{l} 2) f(x) \leq g(x) \\ k(x) \leq h(x) \\ g(x) \leq k(x) \end{array} \right\} \text{Maka } f(x) \leq g(x) \leq k(x) \leq h(x).$$

dimana $f(x) = x^2 - 3$ dan $h(x) = -x^2 - 3$

Titik potong terhadap sumbu $-x$ dari $f(x) = \pm\sqrt{3}$ $\left(\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 3 \\ x^2 = 3 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array} \right) \begin{array}{l} (-\sqrt{3}, 0) \\ (\sqrt{3}, 0) \end{array}$

Titik potong terhadap sumbu $-t$ dari $f(x) = -3$ $\left(\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 3 \\ y = -3 \end{array} \right) (0, -3)$

Grafik:



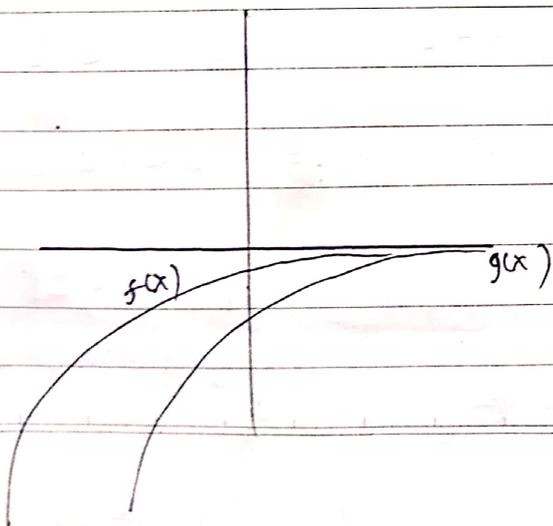
dari persamaan diatas, $f(x) \leq h(x)$ akan dan hanya benar di titik $(0, -3)$.

Maka, berlaku juga untuk $g(x)$ dan $k(x)$ tanpa harus tahu persamaannya, mereka akan bernilai benar di titik $(0, -3)$

Jadi $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -3$

3) $g(x) \leq f(x) < 0$, jika $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, bernilai \cdot

Karena $f(x) \gg g(x)$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ tidak mungkin

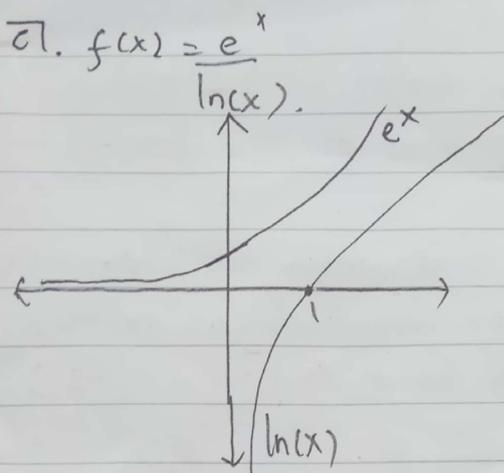


4) a). $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

Fungsi diatas kontinu kecuali $x=2$ & $x=3$ akan diskontinu.

b). $f(x) = \frac{x^3}{x^2}$

Fungsi diatas akan selalu kontinu kecuali $x=0$ akan diskontinu.



Diskontinu = $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

d) $f(x) = x^3 - \frac{2x}{x} + x + \cos(x - \frac{\pi}{3})$

Pasti Kontinu. Pasti Kontinu. Pasti Kontinu. Kontinu

Yang ini kita cek.

$$\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

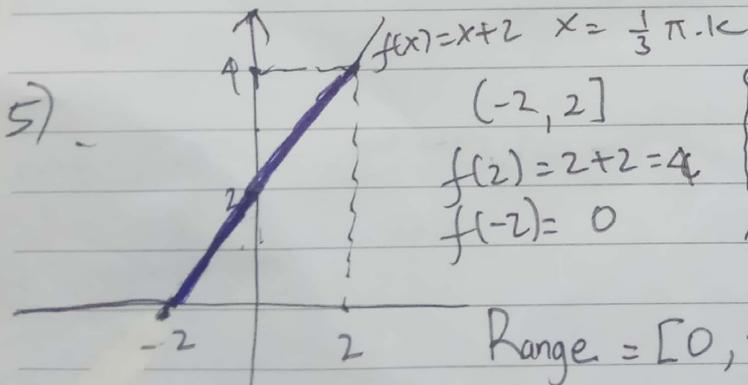
$$x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$$

Diskontinu = $\mathbb{R} \setminus \{0, \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

e) $f(x) = \sin(3x)$ Pasti Kontinu

$\sin(3x) = 0$
 $3x = k \cdot \pi$

Diskontinu di $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$



$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{jika } -2 < x \leq 2 \\ 0, & \text{jika } x \notin (-2, 2] \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = 2$

$f(x)$ Kontinu di $[-2, 2]$

Jadi lainnya diantara 0 dan 4

Jadi, 3 termasuk di range fungsi tersebut