Linear Algebra

1. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (1, 2, 1) dan vektor normal n(-1, 2, 3)

2. Tentukan vektor normal dari persamaan bidang $-3x + \sqrt{2}\,y + 7z = \sqrt{10}$

3. Carilah persamaan vektor garis lurus L yang melalui titik P(3, -1, 2) dan Q(-3, 0, 1). Tentukan Apakah titik R(21, -4, 4) terletak pada garis L.

4. Carilab persamaan bidang datar ax + by + cz + d = 0 yang melalui titik A(2, 1, -1), B (0, -2, 0) dan C(1, -1, 2). Hitunglah jarak titik P(9, 3, 3) ke bidang datar tersebut.

5. Diketahui matriks: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
   Hitunglah:
   a. Nilai eigen
   b. Vektor eigen

PEMBAHASAN

1. $\overrightarrow{Xo} = (1, 2, 1)$
   $\vec{n} = (-1, 2, 3)$

   $\vec{n} \, . \left(x - \overrightarrow{Xo}\right) = 0$
   $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0$
   $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 1 \end{pmatrix} = 0$
   $(-1)(x - 1) + (2)(y - 2) + (3)(z - 1) = 0$
   $-x + 1 + 2y - 4 + 3z - 3 = 0$

   $0 = x - 2y - 3z + 6$ --------> Persamaan bidangnya.

2. Vektor normal suatu persamaan bidang dapat diambil dari koefisien persamaan bidangnya.
   Persamaan bidang : $-3x + \sqrt{2}\, y + 7z = \sqrt{10}$
   Vektor normal : $\vec{n} = -3i + \sqrt{2}\, j + 7k$

3. $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   $Persamaan\ garis\ L$
   $L = P + t\overrightarrow{PQ}$
   $L = (3, -1, 2) + t(-6, 1, -1)$

   Mengecek apakah $R(21, -4, 4)$ terletal pada garis L
   $L = (3, -1, 2) + t(-6, 1, -1)$
   $(21, -4, 4) = (3, -1, 2) + t(-6, 1, -1)$
   $(18, -3, 2) = t(-6, 1, -1)$ -------> tidak ada nilai t yang memenuhi

   Dikarenakan tidak ada t yang memenuhi maka **titik R tidak terletak pada garis L.**

4. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{AC}$$
$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$\vec{n} = (-9i - j + 4k) - (3k - 2i - 6j)$$
$$\vec{n} = -7i + 5j + k$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}\,.\,(x - A) = 0$$
$$\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = 0$$
$$\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = 0$$
$$(-7)(x-2) + (5)(y-1) + (1)(z+1) = 0$$
$0 = -7x + 5y + z + 10$ --------> Persamaan bidangnya

Jarak titik $p(9,3,3)$ ke persamaan bidang.
$$d = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
$$d = \frac{(-7)(9) + (5)(3) + (1)(3) + (10)}{\sqrt{(-7)^2 + (5)^2 + (1)^2}}$$
$$d = \frac{-63 + 15 + 3 + 10}{\sqrt{49 + 25 + 1}}$$
$$d = \frac{-35}{\sqrt{75}}$$
$d = \frac{-7}{5}\sqrt{3}$ ---------> Jarak titik P ke bidang

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

   a. Nilai Eigen
   $$\det(\lambda I - A) = 0$$
   $$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$
   $$det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 4 \\ 1 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$
   $$(\lambda - 2)(\lambda + 1) - (1)(4) = 0$$

$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$
$(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$
$\lambda_1 = 3$
$\lambda_2 = -2$

b. Vektor Eigen

Untuk $\lambda_1 = 3$
$AX_1 = \lambda_1 X_1$
$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2a_1 & -4b_1 \\ -1a_1 & -1b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_1 \\ 3b_1 \end{bmatrix}$

$2a_1 - 4b_1 = 3a_1$
$a_1 = -4b_1$
$b_1 = k$
$a_1 = -4k$

$X_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$
$X_1 = \begin{bmatrix} -4k \\ k \end{bmatrix}$
$X_1 = k\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\lambda_2 = -2$
$AX_2 = \lambda_2 X_2$
$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 2a_2 & -4b_2 \\ -1a_2 & -1b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_2 \\ -2b_2 \end{bmatrix}$

$2a_2 - 4b_2 = -2a_2$
$a_2 = b_2$
$b_2 = k$
$a_2 = k$

$X_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$
$X_2 = \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$
$X_2 = k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$