NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971

Soal dan Jawaban Matriks

1. Tuliskan Definisi Matriks dan berikan contoh masing-masing matriks berukuran 1x3 , 3x2 , 3x3.

   DEFINISI MATRIKS
   Adalah bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk segi empat/bujur sangkar, dan diletakkan diantara dua tanda kurung, kemudian diberi simbol dengan huruf besar.

   Contoh:
   Matriks 1x3 => $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$

   Matriks 3x2 => $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

   Matriks 3x3 => $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 16 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$

2. Misalkan $A = (aij)$ dan $B = (bij)$ masing-masing menotasikan suatu matriks. Tentukan syarat A dan B dapat dilakukan operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian matriks. Berikan contoh masing-masing operasi matriks tersebut.

   Materi operasi hitung pada matriks meliputi operasi hitung penjumlahan, pengurangan, dan perkalian matriks.

   Operasi hitung penjumlahan dan pengurangan pada dua buah matrik dapat dilakukan jika:

   dua buah matriks tersebut memiliki ukuran yang sama. Ukuran matriks yang sama ditunjukkan dengan baris dan kolom pada matriks tersebut sama.

   Syarat : ordonya harus sama.
   Contoh : diketahui matriks A, B dan C sebagai berikut :

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971

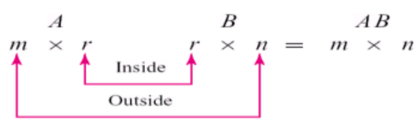
Karena A dan B ordonya sama, maka bisa dilakukan operasi penjumlahan maupun pengurangan sebagai berikut:

$$A+B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad A-B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

Sedangkan C ordonya tidak sama dengan A maupun B, sehingga tidak bisa dilakukan operasi penjumlahan maupun pengurangan.

Operasi hitung perkalian pada dua buah matrik dapat dilakukan jika:

Matriks pertama memiliki jumlah kolom yang sama banyaknya dengan jumlah baris pada matriks ke dua.



Contoh diketahui matriks A dan B sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Hitunglah : C = AB

A_{2x3} X B_{3x4} = C_{2x4}

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971

$$=\begin{bmatrix} (1.4+2.0\ +4.2) & (1.1+2.-1\ +4.7) & (1.4+2.3\ +4.5) & (1.3+2.1\ +4.2) \\ (2.4\ +6.0\ +\ 0.2) & (2.1\ +6.-1\ +\ 0.7) & (2.4\ +6.3\ +\ 0.5) & (2.3\ +6.1\ +\ 0.2) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$$

Bagaimana jika : $B_{3x4}\ A_{2x3}$ = ? tidak memenuhi syarat perkalian, tidak terdefinisi.

3. Berikan contoh perkalian skalar pada matriks.

OPERASI PERKALIAN DENGAN BILANGAN SKALAR

Contoh : diketahui matriks A, B dan C sebagai berikut :

A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, C = $\begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

Maka :

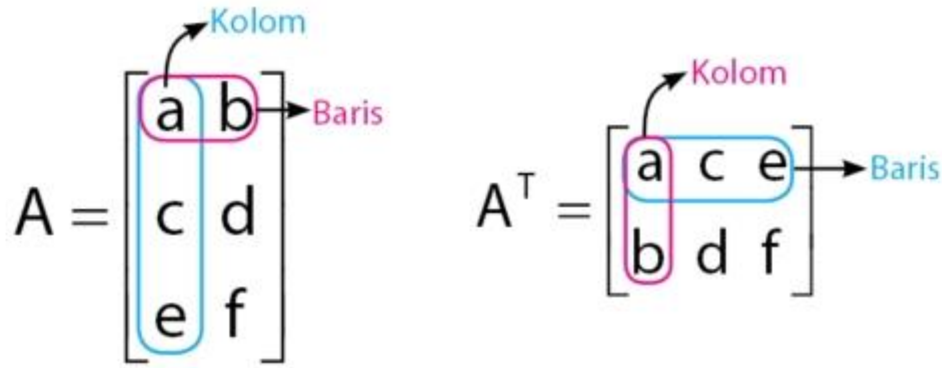
2A = $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$, (-1)B = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\frac{1}{3}$C = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

4. Sebutkan sifat-sifat transpose pada matriks.

Bagian yang cukup penting dari materi matriks adalah transpose matriks. Transpose matriks A disimbolkan dengan A^T

Matriks transpose A^T adalah matriks yang diperoleh dengan cara menukar elemen pada baris menjedi elemen pada kolom. Untuk penjelasan lebih lanjut perhatikan gambar di bawah.

NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971



Matriks transpose memiliki sifat-sifat yaitu,

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$ dan juga $(A - B)^T = A^T - B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(k.A)^T = k.A^T$
4. $(AB)^T = B^TA^T$

5. Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan hasil dari operasi pada matriks berikut :

(a) $2A^T + C$

$$= 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$=2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971

(b) D^T - E^T

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T$$

Pakailah Sifat Dari Matriks Transpose,Yaitu : $(A - B)^T = A^T - B^T$ menjadi:

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) $(D - E)^T$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) $B^T – 5C^T$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T - 5\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 20 & 5 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$$

= Tidak Terdefinisi

Karena Tidak Sesuai dengan Syarat Penjumlahan Matriks dimana ordo kedua matriks harus sama, maka operasi hitung ini tidak dapat diselesaikan (tidak redefinisi)

NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971

(e) B - B^T

$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $(2E^T - 3D^T)$

$= 2\begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T - 3\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$

$=2\begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 15 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

(g) tr(DE^T), tr menotasikan trace

$= \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}^T\right)$

$= \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$

$= \text{tr}\begin{bmatrix} 17 & 8 & 17 \\ -3 & 3 & 0 \\ 32 & 7 & 30 \end{bmatrix}$

= 17 + 3 + 30

= 50

(h) tr (BC)

$= \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}\right)$

$= \text{tr}\begin{bmatrix} 1 & 15 & 3 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

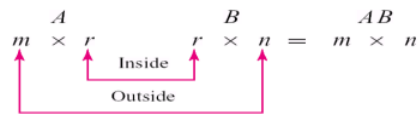
= Tidak Terdefinisi

matriks tersebut bukan merupakan matriks persegi yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama, maka trace matriks tidak dapat dicari sehingga jawaban tidak terdefinisi.

NAMA : EDWARD
NIM : 2201741971

6. Apakah perkalian matriks bersifat komutatif ? Jelaskan dan berikan contoh pendukung penjelasan anda.

   Perkalian Matriks Tidak Bersifat Komutatif, karena yang sudah dijelaskan pada soal-soal sebelumnya yaitu ;



Matriks pertama memiliki jumlah kolom yang sama banyaknya dengan jumlah baris pada matriks ke dua.

Maka dari itu, jika perkalian matriks bersifat komutatif, belum tentu jumlah kolom matriks kedua sama dengan jumlah baris matriks pertama.

Pembuktian:

Diketahui Matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Tentukan A.B dan B.A!!!

Jawaban:

A.B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} 13 & 3 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$

dan B.A = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} -1 & 9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}$

Dari Hasil Perkalian Kedua Matriks Diatas, Terbukti Bahwa A.B dan B.A

Menghasilkan hasil yang berbeda, Maka Perkalian Matriks Tidak Bersifat Komutatif.